$f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ ομοιομορφισμός $\Longleftrightarrow f, f^{-1}$ συνεχείς

αφ4. $(*) \to \left[(\forall A): A \text{ ανοιχτό} \Longleftrightarrow f(A) \text{ ανοιχτό}\right] \Longleftrightarrow f, f^{-1}$ συνεχείς δηλ. ομοιομορφισμός

Απόδειξη

($\Longleftarrow$) Έστω f, f^{-1} συνεχείς.

A ανοιχτό $\xRightarrow{f^{-1}\text{ συνεχής}} (f^{-1})^{-1}(A)$ ανοιχτό $\xRightarrow{(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)} f(A)$ ανοιχτό

$f(A)$ ανοιχτό $\xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f^{-1}(f(A))$ ανοιχτό $\xRightarrow{f^{-1}(f(A)) = A} A$ ανοιχτό

($\Longrightarrow$) Έστω ισχύει η $(*)$.

[Έστω $Y \subseteq E_2$, Y ανοιχτό. Τότε $(\exists A \subseteq E_1): f(A) = Y$ ανοιχτό $\xRightarrow{(*)}$

A ανοιχτό $\xRightarrow{A = f^{-1}(Y)} f^{-1}(Y)$ ανοιχτό] $\Longrightarrow f$ συνεχής

$\left.\begin{array}{l} A \subseteq E_1 \text{ ανοιχτό} \xRightarrow{(*)} f(A) \text{ ανοιχτό} \\ f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) \end{array}\right\} \Longrightarrow f^{-1}$ συνεχής

Υπενθύμιση

(E, ρ) ολικά φραγμ. $\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) : \exists A = A(\varepsilon) \subseteq E$, A πεπερ. κ ε-πυκνό

A είναι ε-πυκνό $\Longleftrightarrow (\forall x \in E)(\exists y \in A) : \rho(x, y) < \varepsilon$

Πρόταση: (E, ρ) ολικά φραγμένος $\Longleftrightarrow$ {$(\forall \varepsilon > 0)$ υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του E με σφαιρικές περιοχές ακτίνας $\varepsilon > 0$}

Πρόταση: Κάθε ολικά φραγμ. μ.χ. είναι φραγμένος μ.χ. ($\not\Longleftarrow$)

Άσκηση

Αν A είναι υποσύνολο ενός μ.χ. ν.δ.ο. A ολικά φραγμ. $\Longrightarrow \bar{A}$ ολικά φραγμ.

Απόδειξη

($\Longrightarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$, ε τυχών αριθμός. Τότε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, $x_i \in A$, $i = 1, \dots, k$ γιατί A ολικά φραγμ.

$y \in \bar{A} \Longrightarrow B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset \xRightarrow{A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})} B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})\right) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{k} \left(B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})\right) \neq \emptyset \Longrightarrow (\exists j \in \{1, \dots, k\}) : B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset \Longrightarrow$

$(\exists z) : z \in B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \wedge z \in B(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$

$\rho(y, x_j) \leq \rho(y, z) + \rho(z, x_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Longrightarrow y \in B(x_j, \varepsilon) \Longrightarrow y \in \bigcup_{i=1}^{k} B(x_j, \varepsilon) \Longrightarrow$

$\bar{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_j, \varepsilon)$ άρα $\bar{A}$ ολικά φραγμένο

($\Longleftarrow$) Ισχύει πάντα και είναι προφανές γιατί $\bar{A} \supseteq A$

Έστω (E,ρ) ολικά φραγμ.
Ν.δ.ο. η διάμετρος είναι ίση με τη διάμετρο ενός
το πολύ αριθμήσιμου και πυκνού υποσυνόλου του.

Απόδειξη

Έστω E ολικά φραγμ. Τότε $(\forall \nu \in \mathbb{N}): \exists A_\nu \subseteq E$ κ $\frac{1}{\nu}$-πυκνό, A_ν πεπερ.
$A = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} A_\nu$ το πολύ αριθμ. Έστω $x \in E$ (x τυχόν αριθμός) κ $\varepsilon > 0$ (ε τυχόν αριθμός)
Τότε $(\exists \nu_0 \in \mathbb{N}): \frac{1}{\nu_0} < \varepsilon$. Το A_{ν_0} είναι $\frac{1}{\nu_0}$-πυκνό. Άρα $(\exists y \in A_{\nu_0}): \rho(x,y) < \frac{1}{\nu_0} < \varepsilon$
$\Rightarrow x \in B(y,\varepsilon)$ όπου $y \in A_{\nu_0} \subseteq \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} A_\nu = A \Rightarrow B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow$
$\Rightarrow E \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = E$ Ακόμη ισχύει: $\delta(A) = \delta(\bar{A}) = \delta(E)$

$f: E \to E$, f συστολή $\Leftrightarrow (\exists \theta): 0 \leq \theta < 1: \rho(f(x), f(y)) \leq \theta \rho(x,y)$
Αρχή συστολής: E πλήρης μ.χ. κ $f: E \to E$ συστολή, τότε υπάρχει
: μοναδικό $a \in E$: $f(a) = a$

Άσκηση

Έστω E πλήρης μ.χ. κ $f: E \xrightarrow{\text{επί}} E$: $(\exists a > 1): \rho(f(x), f(y)) \geq a\rho(x,y)$, x,y εν E
Ν.δ.ο. η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο εν E.

Απόδειξη

$f(x) = f(y) \Rightarrow 0 = \rho(f(x), f(y)) \geq a\rho(x,y) \Rightarrow a\rho(x,y) \leq 0 \Rightarrow \rho(x,y) \leq 0 \Rightarrow$
$\rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ "1-1" (και επί) άρα f^{-1} συνάρτηση
Η $f^{-1}: E \to E$ συνάρτηση. z, w εν E. Επειδή $f: E \xrightarrow{\text{επί}} E$,
$(\exists x, y \text{ εν } E): f(x) = z, f(y) = w \Rightarrow f^{-1}(z) = x$, $f^{-1}(w) = y$
Άρα $\rho(f(x), f(y)) \geq a\rho(x,y) \Rightarrow \rho(z,w) \geq a\rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) \Rightarrow$
$\rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) \leq \frac{1}{a}\rho(z,w)$, z,w εν E με $0 < \frac{1}{a} < 1$. Άρα f^{-1} συστολή
ο E είναι πλήρης (από υπόθεση) άρα $(\exists \beta \in E): f^{-1}(\beta) = \beta \xrightarrow{f \text{ συνάρτηση}}$
$\beta = f(\beta)$
Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της Αρχής της συστολής
οπότε αυτό το β είναι και μοναδικό

N.δ.ο. $\overbrace{\bar{A}-\bar{B}\subseteq\overline{A-B}}^{(*)}$ (Το αντίστροφο δεν ισχύει)

<u>Απόδειξη</u>

Έστω δεν ισχύει η (*). Τότε υπάρχει x: $x\in\bar{A}-\bar{B}$ κ $x\notin\overline{A-B}$

Δηλ. $\underline{x\in\bar{A}\wedge x\notin\bar{B}}$ κ $\underline{(\exists U(x)) : U(x)\cap(A-B)=\emptyset}$

$(\exists U(x)): U(x)\cap(A-B)=\emptyset$ Δηλ. $U(x)\subseteq(A-B)^c\Rightarrow U(x)\subseteq(A\cap B^c)^c = A^c\cup B$

$x\in A^c \vee x\in B \xrightarrow{x\notin\bar{B}\supseteq B} x\in A^c$.

Ισχύει $x\notin\bar{B}\Rightarrow(\exists V(x)): V(x)\cap B=\emptyset\Rightarrow V(x)\subseteq B^c$

Έστω $W(x)=U(x)\cap V(x)$ και άρα $V(x)\supseteq W(x) \wedge U(x)\supseteq W(x)$

$$\Rightarrow \text{Άρα } \left.\begin{aligned} &W(x)\subseteq V(x)\subseteq B^c \\ &W(x)\subseteq U(x)\subseteq A^c\cup B \end{aligned}\right\} \Rightarrow W(x)\subseteq A^c \Rightarrow x\in(A^c)^\circ=(\bar{A})^c \quad \text{Άτοπο}$$